# SOLUSI POLINOMIALPERSAMAAN HERMITE YANG DIPERUMUM

**Suriyaamsah[1*], Asmara Karma[2], Aziskhan[2]**

[1]Mahasiswa Program Studi S1 Matematika
[2]Dosen JurusanMatematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Riau
Kampus Binawidya Pekanbaru (28293) Indonesia

*amsyahsurya@ymail.com

**ABSTRACT**

This article discusses how to find a solution of generalized Hermite equation in the form of a polynomial. The discussion focuses on a necessary and sufficient condition for the existence of polynomial solutions of the generalized Hermite equation. By providing certain restrictionson the coefficients of the polynomial, the solution obtained is a monic polynomial.

Keywords : *polynomial, Hermite's equation, differential equations*.

**ABSTRAK**

Artikel ini mendiskusikan bagaimana menemukan solusi polinomial dari suatu persamaan umum Hermite Pendiskusian difokuskan pada syarat perlu dan cukup untuk keberadaan solusi polinomial dari persamaan umum Hermit. Dengan memberikan batasan tertentu pada koefisien polinomial, solusi polinomial yang didapat berbentuk polinomial monik.

Kata kunci : *polinomial, persamaan Hermite, persamaan diferensial*.

## 1. PENDAHULUAN

Persamaan diferensial adalah persamaanmatematika untuk fungsi satu variabel atau lebih, yang menghubungkan nilai fungsi itu sendiri dan turunannya dalam berbagai orde. Persamaan diferensial memegang peranan penting dalam rekayasa, fisika, ilmu ekonomi dan berbagai macam bidang ilmu lain. Jika terdapat variabel bebas yang tunggal (*single independent variable*) dan turunannya merupakan turunan biasa maka disebut dengan persamaan diferensial biasa, kemudian jika terdapat dua atau lebih variabel bebas dan turunannya adalah turunan parsial disebut dengan persamaan diferensial parsial [4, h:3].

Berdasarkan sifat kelinearan dari peubah tak bebasnya, persamaan diferensial baik persamaan diferensial biasa maupun persamaan diferensial parsial dapat digolongkan menjadi persamaan diferensial linear dan persamaan diferensial tak linear. Suatu persamaan disebut linear apabila fungsi yang tidak diketahui dan turunannya muncul dalam pangkat satu, apabila tidak memenuhi syarat ini maka persamaan tersebut tak linear [2, h:31]. Persamaan diferensial yang berorde $n$ dapat ditulis dalam bentuk

$$A(x)y^{(n)} + B(x)y^{(n-1)} + \cdots + Q(x)y' + R(x)y' = f(x). \qquad (1)$$

Terdapat banyak jenis persamaan diferensial diantaranya adalah persamaan diferensial Hermite, persamaan diferensial Leguerre, persamaan diferensial Legendre, persamaan diferensial Chebyshev dan lain sebagainya. Penyelesaian persamaan diferensial inipun ada berbagai macam tergantung jenis dari persamaan diferensial tersebut, penyelesaian persamaan diferensial kadangkala tidak dapat diselesaikan secara eksak tetapi penyelesaiannya dapat menggunakan metode numerik. Untuk mencari solusi dari persamaan diferensial, dapat digunakan beberapa metode yaitu metode karakteristik, koefisien tak tentu, urutan tereduksi dan penyelesaian dengan deret [1, h:209]. Persamaandiferensial yang kondisi persamaannya diberikan dalam bentuk umum dari persamaan Hermite dan mempunyaikoefisien$p$, $M$ dan $r$, jika $M = 1, p = 2$ dan $r$ adalah sebuah bilangan bulat positif maka persamaan yang diperolehdisebut persamaan Hermite dan memiliki solusi yang sering dikenal dengan nama polinomial Hermite, selanjutnyaketika $p \neq 0$, $M$ adalah bilangan bulat positif yang lebih besar dari 1 dan $r$ adalah bilangan bulat positif apakah disebut persamaan Hermite dan mempunyai solusi polinomial Hermite. Dengan latar belakang tersebut, penulis tertarik untuk membahas jurnal yang ditulis oleh Gabriel B. Costa dan Lawrence E. Levine yang berjudul " *polynomial solutions of certain classes of ordinary differential equations*"[3]. Penelitian ini bertujuan untuk menemukan solusi polinomial dari persamaan umum Hermite, cara ini mengubah ODE (*Ordinary Differential Equation)* dan kondisi yang diberikan kepersamaan umum Hermite dengan koefisien variabel yang tidak diketahui.

## 2. PERSAMAAN DIFERENSIALHERMITE YANG DIPERUMUM

Dalam tulisan ini akan dibahas bagaimana mencari solusi polinomial persamaan Hermite yang diperumum yang diberikan dalam bentuk persamaan umum Hermite yaitu

$$y'' - px^My' + prx^{M-1}y = 0, \qquad (2)$$

dimana nilai $p \neq 0$, $M$ dan $r$ adalah bilangan bulat positif. Untuk $M = 1$, $p = 2$ dan $r$ adalah sebuah bilangan bulat positif sehingga persamaan (2) menjadi persamaan Hermite dan memiliki solusi yang sering dikenal dengan nama polinomial Hermite.Pada pembahasan ini akan menentukan apakah persamaan (2) memiliki solusi polinomial ketika $p \neq 0$, $M$ adalah bilangan bulat positif yang lebih besar dari satu dan $r$ adalah bilangan bulat positif [5, h:60].

**Teorema 1**
Perhatikan persamaan diferensial orde kedua dari persamaan (2) maka :
Terdapat sebuah solusi polinomial untuk persamaan (2) berderajat $r$ jika dan hanya jika

$$r = k(M + 1) \qquad (3)$$

atau

$$r = k(M + 1) + 1 \qquad (4)$$

untuk suatu

$$k = 0,1,2,\ldots \quad (5)$$

Selanjutnya, ada beberapa kasus, disetiap kasus terdapat tepatnya satu (hingga untuk suatu konstanta perkalian) solusi polinomial yang selalu berderajat $r$ yang memiliki$(k + 1)$ suku dengan selisih derajat$(M + 1)$, yakni jika satu suku berderajat $b$, suku tertinggi berikutnya berderajat$b + M + 1$.

**Bukti.**

Subtitusi dari persamaan

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad (6)$$

pada persamaan $y'' - px^M y' + prx^{M-1} y = 0$ yang didefinisikan dengan manipulasi rumus $a_2 = a_3 = \cdots = a_M = 0$ (7)

sehingga diperoleh

$$a_{n+M+1} = \frac{p(n-r)a_n}{(n+M+1)(n+M)}, \qquad n = 0,1,2,\ldots \quad (8)$$

Turunkan persamaan (6) sehingga diperoleh

$$y' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}. \quad (9)$$

$$y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}. \quad (10)$$

Subtitusikan persamaan (9) dan persamaan (10) kepersamaan (2) menjadi

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} - px^M \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} + prx^{M-1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

atau

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} - p \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n+M-1} + pr \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+M-1} = 0. \quad (11)$$

Subtitusikan nilai $n = 0,1,2,\ldots,n,n+M+1$ kepersamaan (11) menjadi

$$2.1a_2 + 3.2a_3 x + 4.3a_4 x^2 + \cdots + (n+M+1)(n+M)a_{n+M+1} x^{n+M-1} + \cdots$$
$$-pa_1 x^M - 2pa_2 x^{M+1} - 3pa_3 x^{M+2} - \cdots - pna_n x^{n+M-1} - \cdots$$
$$+pra_0 x^{M-1} + pra_1 x^M + pra_2 x^{M+1} + \cdots + pra_n x^{n+M-1} + \cdots = 0$$

pisahkan persamaan sesuai koefisien yang sama

$2a_2 - px^M a_1 + pra_0 x^{M-1} = 0$ untuk koefisien $x^0$

$6a_3 x - 2px^M a_2 + prx^{M-1} a_1 x = 0$ untuk koefisien $x^1$ (12)

dengan manipulasi rumus $a_2 = a_3 = \cdots = a_M = 0$ diperoleh rumus rekursi dalam bentuk umum ketika $n = 2,3, \dots$

$$(n + M + 1)(n + M)a_{n+M+1} - pna_n + pra_n = 0$$

$$(n + M + 1)(n + M)a_{n+M+1} = pna_n - pra_n$$

$$(n + M + 1)(n + M)a_{n+M+1} = (pn - pr)a_n$$

$$a_{n+M+1} = \frac{p(n - r)a_n}{(n + M + 1)(n + M)},$$

sehingga diperoleh rumus rekursi untuk mencari solusi polinomial persamaan Hermite adalah

$$a_{n+M+1} = \frac{p(n - r)a_n}{(n + M + 1)(n + M)}, \qquad n = 0,1,2, \dots \quad (13)$$

Sekarang misalkan terdapat solusi polinomial berderajat $r$. Jika $r = 1$, maka $r = 0(M + 1) + 1$. Jika $r \geq 2$, maka $r \geq M + 1$ dengan persamaan (6). Namun kemudian$a_r \neq 0$ memaksa $a_{r-(M+1)} \neq 0$. Jika $r - (M + 1) \leq M$, maka persamaan (6) memaksa$r - (M + 1)$ setaradengan 0 ataupun 1. Sebaliknya dapat dilanjutkan dengan mengurangkan $r$ dengan kelipatan $(M + 1)$ hingga bilangan bulat $k$ diperoleh sedemikian hingga

$$r - k(M + 1) = 0,1 \quad (14)$$

Untuk $r - (M + 1) = 0$, $r$ dikurangi dengan kelipatan$(M + 1), (2M + 2), \dots, (kM + k)$ sehingga diperoleh

$$r - (M + 1) = 0$$

$$r - (2M + 2) = 0$$

$$r - (3M + 3) = 0$$

$$\vdots$$

$$r - (kM + k) = 0$$

$$r - k(M + 1) = 0$$

$$r = k(M + 1).$$

Untuk $r - (M + 1) = 1$, $r$ dikurangi dengan kelipatan $(M + 1), (2M + 2), \dots, (kM + k)$ sehingga diperoleh

$$r - (M + 1) = 1$$

$$r - (2M + 2) = 1$$

$$r - (3M + 3) = 1$$

$$\vdots$$

$$r-(kM+k)=1$$

$$r-k(M+1)=1$$

$$r=k(M+1)+1$$

maka persamaan (6) memiliki$r-(M+1)$ sama untuk 0 atau 1

$$r-k(M+1)=0 \text{ atau } 1 \qquad (14)$$

Dengan demikian ditentukan persamaan (3) dan persamaan (4).

Sebaliknya, jika $r=k(M+1)$ untuk suatu $k$, maka dapat dinyatakan dari persamaan (7) bahwaketika $n=r=k(M+1)$, diperoleh $a_{n+M+1}=0$. Oleh sebab itu $a_{l(M+1)}=0$ untuk semua $l \geq k+1$.Selanjutnya, dengan menggunakan persamaan (6) disertai dengan persamaan (7),diperoleh $a_{i+l(M+1)}=0$, untuk semua $2 \leq i \leq M$dan $l \geq k$.

Kemudian dapat disimpulkan bahwa jika$a_{i+l(M+1)}=0$, untuk semua $l \geq k$, harus tetapkan nilai $a_1=0$dan gunaan persamaan (7).Jika $a_0 \neq 0$, persamaan (7) kembali mengimplikasikan bahwa$a_r=a_{k(M+1)}$ dan karena itu $y(x)$ merupakan sebuah polinomial berderajat *r*.

Kemudian dapat disimpulkan bahwa jika $a_1 \neq 0$, maka $y(x)$ bukansebuah polinomial. Dengan demikian didapat $a_0$ sedemikian hingga$a_r=1$, dan solusinya akan menjadi monik. Disini dapat dilihat bahwa solusi polinomial adalah tunggal hingga konstanta perkalian $a_0$.

Pertimbangan yang sama dapat diterapkan pada kasus $r=k(M+1)+1$. Solusi polinomialnya tunggal hingga konstanta perkalian $a_1$.

**Akibat 2**
untuk solusi polinomial dari persamaan $y''-p\,x^M y'+prx^{M-1}y=0$, jika $r=k(M+1)$ maka derajat terendah dari solusinya adalah $a_0$, jika $r=k(M+1)+1$ maka derajat terendah dari solusi adalah $a_1 x$.
Catatan jika $r=k(M+1)$, maka pilihannya adalah $a_1=0$. Jika $r=k(M+1)+1$, maka pilihannya adalah $a_0=0$.

**Bukti.**
Analisa dari $r=k(M+1)$ dalam rumus rekursi persamaan (8) diikuti pengurangan rumus $(k-1)$.
$k$ dikurangi dengan kelipatan $(k-1),(k-2),\ldots,(k-k)$ sehingga diperoleh

$$a_r x^r=a_{k(M+1)}x^{k(M+1)}$$

$$a_{(k-1)(M+1)}x^{(k-1)(M+1)}$$

$$\vdots$$

$$a_{(M+1)}x^{(M+1)}$$

$$a_0.$$

Jika $r = k(M+1)$ maka derajat terendah dari solusi polinomial adalah $a_0$ sama, jika $r = k(M+1)+1$ maka derajat terendahnya $a_1 x$.
Catatan jika $r = k(M+1)$, maka pilihannya adalah $a_1 = 0$. Jika $r = k(M+1)+1$, maka pilihannya adalah $a_0 = 0$.

## 3. CONTOH

Perhatikan persamaan diferensial Hermite$y'' - p\,x^M y' + prx^{M-1}y = 0$

Jika diberikan nilai $p = 1$, $M = 5$ dan $r = 12$ diperoleh persamaan $y'' - x^5 y' + 12x^4 y = 0$. Tentukan solusi polinomial dari persamaan diferensial tersebut?

**Solusi.**
Langkah 1. Selanjutnya gunakan Teorema 1 untuk mencari nilai $k$ atau subtitusi nilai $M$ dan $r$ pada persamaan (3) atau (4) menjadi

$$r = k(M+1)$$

$$12 = k(5+1)$$

$$12 = k(6)$$

$$k = 2$$

Karena memenuhi Teorema 1 dan diperoleh nilai $k$ maka persamaan $y'' - x^5 y' + 12x^4 y = 0$ mempunyai solusi polinomial.

Langkah 2. Selanjutnya subtitusikan nilai $p, M$ dan $r$ pada persamaan (8) sehingga diperoleh persamaan

$$a_{n+6} = \frac{(n-12)a_n}{(n+6)(n+5)}.$$

Subtitusikan nilai $n = 0,1,\ldots,6$ untuk mendapatkan nilai $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{12}$

untuk nilai $n = 0$, diperoleh$a_{0+6} = \frac{(0-12)a_0}{(0+6)(0+5)}$

$$a_6 = \frac{-3}{2}a_0$$

$$a_0 = \frac{-2}{3}a_2$$

untuk nilai $n = 1$, diperoleh$a_{1+6} = \frac{(1-12)a_1}{(1+6)(1+5)}$

$$a_7 = -\frac{11}{42}a_1$$

$$a_1 = -\frac{42}{11}a_7$$

untuk nilai $n = 2$, diperoleh$a_{2+6} = \frac{(2-12)a_2}{(2+6)(2+5)}$

$$a_8 = -\frac{10}{56}a_2$$

$$a_2 = -\frac{56}{10}a_8$$

untuknilai $n = 3$, diperoleh $a_{3+6} = \frac{(3-12)a_3}{(3+6)(3+5)}$

$$a_9 = -\frac{9}{72}a_3$$

$$a_3 = -\frac{72}{9}a_9$$

untuk nilai $n = 4$, diperoleh $a_{4+6} = \frac{(4-12)a_4}{(4+6)(4+5)}$

$$a_{10} = -\frac{8}{90}a_4$$

$$a_4 = -\frac{90}{8}a_{10}$$

untuk nilai $n = 5$, diperoleh $a_{5+6} = \frac{(5-12)a_5}{(5+6)(5+5)}$

$$a_{11} = -\frac{7}{110}a_5$$

$$a_5 = -\frac{110}{7}a_{11}$$

untuk nilai $n = 6$, diperoleh $a_{6+6} = \frac{(6-12)a_6}{(6+6)(6+5)}$

$$a_{12} = -\frac{6}{132}a_6$$

$$a_6 = -22a_{12}$$

Langkah 3. Selanjutnya subtitusikan nilai $a_0, a_1, a_2, .., a_{12}$ pada persamaan (6) sehingga diperoleh

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

$$y = a_0x^0 + a_1x^1 + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + a_5x^5 + a_6x^6 + a_7x^7 + a_8x^8 + a_9x^9 + a_{10}x^{10} + a_{11}x^{11} + a_{12}x^{12}$$

$$y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + a_5x^5 + a_6x^6 + a_7x^7 + a_8x^8 + a_9x^9 + a_{10}x^{10} + a_{11}x^{11} + a_{12}x^{12}$$

$$y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + a_5x^5 + (-\frac{2}{5}a_0)x^6 + (-\frac{11}{42}a_1)x^7 + (-\frac{10}{56}a_2)x^8 + (-\frac{9}{72}a_3)x^9 + (-\frac{8}{90}a_4)x^{10} + (-\frac{7}{110}a_5)x^{11} + (-\frac{6}{132}a_6)x^{12}$$

Dengan manipulasi rumus $a_2, a_3, a_4, a_5 = 0$ sehingga persamaan menjadi

$$y = a_0 + a_1x + 0 + 0 + 0 + 0 - \frac{2}{5}a_0x^6 - \frac{11}{42}a_1x^7 + 0 + 0 + 0 + 0 - \frac{6}{132}a_6x^{12}$$

$$y = a_0 + a_1x - \frac{2}{5}a_0x^6 - \frac{11}{42}a_1x^7 - \frac{6}{132}a_6x^{12}$$

$$y = a_0 - \frac{2}{5}a_0x^6 + a_1x - \frac{11}{42}a_1x^7 - \frac{6}{132}(-\frac{2}{5}a_0)x^{12}$$

pisahkan persamaan sesuai koefisien yang sama sehingga menjadi

$$y = \left(1 - \frac{2}{5}x^6 + \frac{1}{55}x^{12}\right)a_0 + (x - \frac{11}{42}x^7)a_1$$

karena menggunakan $r = k(M + 1)$ maka harus mengambil permisalan untuk $a_0$ sehingga $a_1 = 0$, Dari Akibat 2 sehingga persamaan menjadi

$$y = \left(1 - \frac{2}{5}x^6 + \frac{1}{55}x^{12}\right)a_0 + (x - \frac{11}{42}x^7)0$$

$$y = \left(1 - \frac{2}{5}x^6 + \frac{1}{55}x^{12}\right)a_0$$

Langkah 4. Untuk memperoleh solusi polinomial yang monik maka buat permisalan untuk$a_0 = 55$ sehingga persamaan menjadi

$$y = \left(1 - \frac{2}{5}x^6 + \frac{1}{55}x^{12}\right)55$$

$$y = (55 - 22x^6 + x^{12})$$

Solusi $y = (55 - 22x^6 + x^{12})$ merupakan solusi polinomial yang monikdari persamaan diferensial Hermite$y'' - x^5y' + 12x^4y = 0$.

## 4. KESIMPULAN

Berdasarkan pembahasan yang telah dikemukakan sebelumnya, maka diperoleh kesimpulan bahwa untuk mencari solusi polinomial persamaan Hermite yang diperumum yaitu dengan mensubtitusikan nilai $p, M$ dan $r$ dengan pada persamaan umum Hermite $y'' - px^My' + prx^{M-1}y = 0$ dengan syarat $p \neq 0, M$ dan $r$ adalah bilangan bulat positif. Selanjutnya gunakan Teorema 1 yaitu $r = k(M + 1)$ atau $r = k(M + 1) + 1$ untuk menunjukkan bahwa jika suatu persamaan memenuhi Teorema 1 dan terdapat nilai *k* maka persamaan tersebut memiliki solusi polinomial, tetapi jika tidak memenuhi Teorema 1 maka persamaan tersebut tidak memiliki solusi polinomial.

## DAFTAR PUSTAKA

[1] Conte, S. D & C. De Boor. 1980. *Elementary Numerical analysis,* Third Edition. McGraw, New York.

[2] Boyce, W. E & Di Prima, R. C. 1977. *Elementary Differential Equation and Boundary Value Problems,*3rd ed, John Wiley and Sons, New York.

[3] Gabriel B Costa & Lawrence E Levine. 1986. *Polynomial Solutions of certain Classes of Ordinary Differential Equations*. (New York: Dover Publication).

[4] Ince, E . L. 1926. *Ordinary Differential Equations*.(New York: Dover Publication).

[5] Lebedev, N.N. 1965. *Special Functions and Their Applicatins*. (Englewood Cliffs,NJ:Prentice Hall).